# David Hilbert (1862-1943)

– Extraido de *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*; F. Le Lionnais, EUDEBA (1965) –

Jean Dieudonné
Profesor de la Facultad de Ciencias de Nancy.

Es un pasatiempo bastante pueril el pretender comparar a los sabios más eminentes de una misma época. ¿No es lo propio del genio escapar de toda regla y de toda comparación? ¿Y qué medida común se puede establecer entre dos resultados importantes que se encuentran ubicados, uno con respecto al otro, en las antípodas del vasto universo que constituye una ciencia como la matemática? Sin embargo, cada tanto aparecen hombres en quienes la profundidad del pensamiento se suma a una universalidad sin par; parece que no pueden abordar un problema sin iluminarlo inmediatamente bajo un aspecto nuevo y el brillo de sus descubrimientos les confiere pronto una primicia intelectual reconocida por todos. Después de Gauss, el *princeps mathematicorum* por excelencia, Riemann esta supremacía, y después de éste, Poincaré. Desde la muerte de Poincaré, fue a Hilbert a quien correspondío, por consentimiento casi uniforme, el cetro de las matemáticas.

La vida de Hilbert[1] es muy simple, como es a menudo la de un sabio ocupado ante todo por su obra, sobre todo si tiene la suerte de vivir y producir durante un periodo excento de grandes cataclismos sociales y políticos. Nacido en Koenigsberg en 1862 en el seno de una familia de la burguesía, Hilbert realizó la mayor parte de sus estudios en la universidad de esta ciudad, donde hizo su disertación inagural en 1885, fue luego Privat-Docent de 1886 a 1992 y profesor titular de 1893 a 1895. No revela en un principio gran prcocidad y solamente en 1888 atrajo la atención del mundo científico por su primer gran trabajo sobre teoría de invariantes. Desde

[1] En este artículo, hemos sacado gran partido de los importantes comentarios sobre los trabajos de Hilbert insertados en la edición de sus obras (*Gesammelte Abhandlugen*, Berlín, Springer, V.3, 1935), así como el excelente estudio biográfico de O. Blumenthal que figua en ella (tomo IIi).

entonces, los descubrimientos de primer orden se producen en rápida sucesión durante más de veinte años, lo que le valió un renombre mundial consagrado por el Congreso Internacional de matemáticos de 1900. Numerosos alumnos, tanto alemanes como extranjeros, se agruparon a su alrededor en Gotinga, donde fue profesor desde 1895. Terminó su carrera en esta universidad, a la que convirtió en uno de los primeros centros matemáticos de Alemania y del mundo. Nunca quiso abandonarla y fue en Gotinga donde su vida se extinguió el 14 de febrero de 1943.

Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hilbert, es la belleza pura de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de "elegancia"superficial que resulta de cálculos habitualmente conducidos, sino de una satisfacción estética mucho más profunda que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para alcanzarlo. Estos últimos son a menudo de una desconcertante simplicidad. Por lo habitual, no fue un perfeccionamiento, aunque fuera ingenioso, de los métodos de sus antencesores, lo que permitió a Hilbert llegar a sus grandes descubrimientos, sino, por el contrario, un retorno voluntario al origen de la cuestión tratada; así, separaba de la ganga, donde nadie habia sabido verlos, los principios fundamentales que permitian trazar hacia la solución la "via real"vanamente buscada hasta entonces.

Este rasgo aparece ya en los trabajos de Hilbert sobre la Teoría de los Invariantes[2]. Nacida unos cuarenta años antes, era por esa época una de las ramas más "en boga"de la metmática, pero la abundante literatura que se les dedicaba se caracterizaba sobre todo por ser una masa amorfa de cálculos interminables, de donde surgían con gran esfuerzo algunas ideas generales, muy insuficientes al parecer para permitir establecer las leyes universales[3] cuya existencia se sospechaba, pero cuya validez solo se sabia demostrar mediante razonamientos sumamente laboriosos en cada caso particular. Se comprende, por tanto, la sorpresa despertada en el mundo científico cuando en

[2] Un número ligado a una configuración geométrica formada por cierto número de puntos y de curvas algebraicas, cuando es el mismo para la configuración considerada y para odas las que se deducen de ella aplicándole las transformaciones de la especie considerada. Por ejemplo, la distancia de un punto a una recta para todos desplazamiento; la relación entre dos segmentos situados sobre una recta es un invariante de la configuración formada por sus extremidades, para toda semejanza; la razón armónica de cuatro rectas concurrentes es un invariante de estas rectas para toda transformación proyectiva.

[3] La más importante de estas leyes es la de que todos los invariantes de una configuración dad pueden expresarse por combinaciones racionales de un número finito de ellos.

1888 Hilbert demostró estos teoremas generales en pocas páginas y casi sin cálculo; "Esto ya mo es matemáticas, es teología", exclamaba Gordan, uno de los que habian contribuido a edificar la teoría. Uan consecuencia inesperada fue que, casi de un día para otro, la teoría de los invariantes fue dejada de lado; al resolver los principales problemas que planteaba, Hilbert le había dado un golpe mortal. Pero al hacer esto, habia asentado las bases, al mismo tiempo, de una nueva rama del álgebra, la teoría de los "ideales de polinomios", que desde comienzos del siglo XX, debía renovar la vieja geometría algebraica y formar uno de los pilares del álgebra moderna edificada por E. Noether y E. Artin.

La situación era muy distinta en la teoría de los números algebraicos cuando Hilbert comenzó en ella sus importantes investigaciones, hacia 1895. Después de Gauss, fundador de la teoría, todo el esfuerzo del siglo XIX se había concentrado en el estudio de la divisibilidad de los enteros algebraicos de un determinado cuerpo de números[4]. Los perseverantes y profundos trabajos de Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind y Minkowski habían permitido discernir la noción esencial que da la clave del problema, la de "ideal$\tau$ obtener finalmente una perfecta generalización de las propiedades de divisibilidad de los enteros ordinarios. Pero quedaban por dilucidar los fen´menos que se producen cuando se pasa de un cuerpo dado a un "supercuerpo"mayor, es decir, quedaba por determinar cómo se descomponen en el supercuerpo los "ideales primos"del cuerpo inicial. En la época de que hablamos, no se sabía resolver este problema más que en casos muy particulares y no parecía posible derivar ninguna ley general de los hechos conocidos. El gran mérito de Hilbert, y prueba asombrosa de su notable sagacidad, fue el haber sido el primero en formular esas leyes generales; antes,había fundido, en un volumen que llegó a ser clásico, en un todo homogéneo el conjunto de los resultados obtenidos hasta entonces por la teoría de números algebraicos e introdujo en esa ocasión numerosas nociones nuevas, cuya fecundidad debían demostrar los trabajos ulteriores. No obstante, no había podido verificar la exactitud de sus enunciados generales más que en algunos casos especiales, que hoy nos parecen una base muy

[4] Un cuerpo de números es un conjunto de números (reales o complejos) tal que toda operación racional (adición, multiplicación y división) efectuada con números del conjunto da como resultado otro número del conjunto; por ejemplo, todos los números $a + b\sqrt{2}$, donde $a$ y $b$ son "racionales", forman un cuerpo. En este cuerpo se pueden distinguir números llamados "enteros algebraicos", que tienen propiedades análogas a las de los enteros ordinarios. Por ejemplo, los números $a+b\sqrt{2}$ en los que $a$ y $b$ son "enteros"(ordinarios) son los enteros algebraicos del cuerpo precedente.

estrecha para fundamentar una inducción tan amplia. Sólo veinticinco años más tarde cayeron los últimos bastiones de la fortaleza y todos los resultados anunciados por Hilbert se hallarán establecidos en el caso más general. Pero se había dado el impulso inicial y puede decirse que en todo este período la teoría de números algebraicos estuvo totalmente impregnada por los métodos y las ideas de Hilbert, y tendía hacia el objetivo que éste había sido el primero en percibir y en asignarle.

Hasta 1900, los trabajos de Hilbert de los que acabamos de hablar lo habían revelado como un algebrista y un aritmético extraordinario; en los primeros años del siglo XX iba a demostrar que era un analista no menos notable. Fue primeramente en el cálculo de variaciones donde inició un camino totalmente nuevo, llamado desde entonces el "metodo directo"; al aplicarlo al problema de Dirichlet, fue el primero en dar rigor al método del mínimo, esbozado por Riemann cincuenta años antes [5]. Numerosos investigadores han utilizado desde entonces con éxito los mismos principios, en problemas análogos.

Pero las investigaciones más notables de Hilbert en análisis, son las dedicadas a la teoría de ecuaciones integrales. Después de los importantísimos trabajos de Volterra, Poincare y Fredholm, esta teoría reciente estaba entonces en el primer plano de la actualidad matemática. También aquí Hilbert fue el legislador poe excelencia. Retomando la idea general del "paso de lo finito al infinito$\tau$a utilizada por sus predecesores, se propuso fundar, en completa analogía con el álgebra lineal y cuadrática elemental y su traducción al lenguaje geométrico en los espacios de un número finito de dimensiones, una nueva "álgebra funcional", donde los elementos considerados ya no son puntos –como en geometría analítica ordinaria– sino "funciones". No se trataba, sin embargo, de una analogía puramente formal y casi mecánica; el punto esencial consistía en introducir de manera adecuada lo que hoy llamamos las nociones topológicas adaptadas a la teoría. Este fue el progreso más importante realizado por Hilbert al definir y estudiar por primera vez el espacio de un número infinito de dimensiones que lleva ahora su nombre, que permite una transposición al álgebra funcional de la expresión geométrica de los teoremas de álgebra elemental. Munido de este hilo conductor, Hilbert realizó, en memorias que van de 1904 a 1910, lo esencial de su programa, completado luego por los trabajos de sus numerosos dicípulos, entre los que hay que

[5] Ver las aluciones a esta cuestíon en los artículos de Valion, págs. 169-170, y Montel, pág. 182. (Nota de F. Le L.)

citar sobre todos los de E. Schmidt, H. Weyl, Hellinger y Toeplitz. Pero Hilbert no se limitó a eso; toda una parte de sus memorias, y no la menos importante, está dedicada a una cantidad de aplicaciones de las ecuaciones integrales, en las que abundan métodos y resultados tan nuevos como ingeniosos. También aquí, es en el camino trazado por Hilbert por donde se prosigue desde hace treinta años el desarrollo de la rama de la matemática fundada por él y que es uno de los capítulos más importantes del análisis funcional moderno.

Todavía no hemos dicho nada de los trabajos de Hilbert que, quizá más que todas las admirables memorias precedentes, han contribuido a hacer conocer su nombre en todos los medios que se interesan por las matemáticas, aun en un aspecto más elemental; nos referimos a los célebres "Grundlagen der Geometrie"[6], aparecidos en 1899, con los cuales Hilbert se convirtió de golpe en el representante más destacado de la tendencia llamada "axiomática". Sin duda no le faltaron precursores en esta vía: el descubrimiento de las geometrías no–euclideanas, que ya casi tenía un siglo, había enseñado a considerar como relativas las "verdades"de la geometría elemental clásica y en los veinte últimos años del siglo XIX, eran muchos los que sentían la necesidad de aclarar los resortes lógicos de las demostraciones geométricas, separándolos de toda ayuda pedida a la intuición. Pero antes de Hilbert nadie había realizado ese programa con tanta decisión y claridad, ni nadie había sabido destacar tan bien el principio fundamental de que en las matemáticas la "naturaleza"propia de los entes estudiados no interesa; son las "relaciones"que existen entre estos entes lo único que importa. "En lugar se las palabras "puntos", "recta" y "plano"se debe poder decir en geometría sin inconveniente "mesa", "silla" y "vaso de cerveza"decía ya en 1891 en una salida que reproducía aproximadamenteel célebre comienzo (considerado por entonces tan revolucionario) de los "Grundlagen": "Pensemos tres sistemas de cosas, que llamaremos puntos, rectas y planos".

Pero los "Grundlagen"no son solamente una exposisción rigurosa de los elementos de la geométria euclideana; lleva más lejos el análisis del mecanismo lógico e inicia toda una serie de investigaciones sobre la independencia mutua de los diversos axiomas de la geometría y la delimitación de las partes de ésta en que cada uno de ellos interviene de manera esencial. En estos estudios, el autor da libre curso a su genio inventivo y sabe descubrir hasta en los temas más trillados propiedades nuevas, tan notables como insospechadas.

[6] Los fundamentos de la geometría.

Hacia el final de su carrera, Hilbert volvió a la lógica matemática, que había abandonado durante más de quince años. sta vez, se dedicó a un problema más vasto: el de los fundamentos lógicos de "todas"las teorías matemáticas –en particular de la aritmética– y el de la "no–contradicción"de estas teorías. Parece que uno de los motivos que condujeron a Hilbert a retomar los estudios de este género (a los cuales, por lo demás, su obra anterior lo conducía naturalmente) fue una reacción contra las tendencias de los matemáticos llamados "intuicionistas", quienes, para evitar las dificultades lógicas planteadas por las "paradojas"de la Teoría de Conjuntos, no vacilaron en proponer el sacrificio, no solamente de lo esencial de la obra de G. Cantor, sino también de toda una parte del análisis matemático clásico. Contra una poscisión tan radical, Hilbert se rebeló con toda la fuerza de su vigoroso optimismo y de su increbrantable confianza en la potencia del pensamiento humano. Ya en la conferencia pronunciada en el Congreso de 1900 no vaciló en afirmar su convicción de que todo problema matemático llegará un día a resolverse o a demostrar que no tiene solución; un acto de fe semejante se encuentra en una conferencia pronunciada en 1930 (una de sus últimas publicaciones), que termina con estas palabras:"Debemos saber y sabremos", testamento filosóficobien digno de quien había aportado a la ciencia una cosecha tan rica de resultados nuevos. Es con este espíritu que Hilbert, en usu trabajos de lógica matemática, se propone demostrar que es posible, sin abandonar nada de las coquistas anteriores, dar bases indiscutibles al edificio matemático y establecer rigurosamente la imposibilidad de que un razonamiento que reposa sobre estas bases conduzcan nunca a ua contradicción. Sobre este último punto parece que, por una vez, la intuición de Hilbert lo arrastró a esperanzas un tanto exageradas, pues actualmente se tienen buenas razones par dudar de la posibilidad de tales "demostraciones". No por ello es menos cierto que, por el inteés y las discusiones que sucitaron sus trabajos de lógica y los de su escuela, Hilbert contribuyó poderosamente a aclarar el delicado problema de los fundamentos de las matemáticas y el de la naturaleza del razonamiento lógico, particularmente mostrando que solo hay pensamiento claro cuando se lo puede expresar totalmente mediante signos explícitos (y, por tanto, en número finito) y que, a pesar de esta restricción, es perfectamente posible que el matemático razone correctamente sobre el "infinito".

Lo que hemos dicho hasta ahora llevaría a ver en Hilbert un constructor de varias síntesis, que no se interesa por los problemas particulares más que en la medida en que son susceptibles de someterse a una idea general. Semejante creencia no sería completamente inexacta, puesto

que representa una de las tendencias del espiritu de Hilbert, pero daría una imagen deformada y bien incompleta de su riqueza y su asombrosa variedad. Si bien Hilbert es uno de maestros de la axiomática, nunca creyó en las tendencias de algunos de sus dicípulos, de crear una gran teoría para algunas magras aplicaciones y de generalizar por el placer de generalizar. Pocos matemáticos tuvieron como él, la pasión, tan característica del verdadero matemático, por el problema especial, preciso y "concreto"si se puede decir así, ya se relacione o no tal problema con una teoría general bien desarrollada. Sin hablar de su famosa conferencia en el Cogreso de 1900 sobre "Problemas Matemáticos", donde una buena parte de los que enumera son precisamente problemas "aislados", son numerasas las cuestiones de esta naturaleza a las que Hilbert se dedicó con éxito. Nos limitaremos a citar tres de estos resultados, que están a su altura y cada uno de los cuales bastaría para cimentar la fama de un investigador: la primera demostración de la hipótesis de Waring[7], el problema de irreducubilidad[8] y la demostración de la existencia de singularidades en toda superficie de curvatura negativa constante sumergida en el espacio de tres dimensiones.

No es de asombrarse que la influencia de un hombre como Hilbert sobre el pensamiento matemático de su tiempo haya sido considerable y duradera; sin duda, esa influencia todavía no ha alcanzado su apogeo, aunque los numerosos alumnos que él ha formado –muchos de los cuales son hoy en día maestros eminentes– no han contribuido poco a aumentar su alcance. Hemos visto más arriba que ramas enteras de la matemática le deben su orientación o sus métodos; pero su acción es sencible aun en teorías en las que nunca trabajó directamente él mismo, como la topología general por ejemplo. Más que por sus geniales descubrimientos, es quizá por el sesgo de su espíritu que Hilbert ha ejercido la más profunda influencia en el mundo matemático; él enseñó a los matemáticos a "pensar axiomáticamente", es decir, a tratar de reducir cada teoría a su esquema lógico más estricto, desembarazado de la técnica contingente del cálculo. Son ya incontables los resultados nuevos e importantes a los que ha conducido la aplicación de su doctrina, y que han asegurado su triunfo. Pero, más que por su utilidad inmediata, puede decirse que es

[7] Se trata del teorema siguiente: para todo entero $s > 0$, existe u número $g(s)$, "que no depende más que de $s$", tal que "todo"número entero puede expresarse como una suma de $g(s)$ potencias $s$–simás de enteros (a lo sumo). Enunciado por Waring, para un número muy escaso de valores párticulares del exponente $s$.

[8] Si $(x, t)$ es un polinimio de dos variables, de coeficientes "racionales", e irreducibles en el cuerpo de los números racionales, existen infinitos valores racionales $t_0$ de $t$ tales que el polinomio de una variable $P(x, t_0)$ sea irreducible en el cuerpo de los números racionales.

por su atractivo estético y aun, en cierto modo, moral que ha conquistado a la myor parte de los jóvenes matemáticos. Por su necesidad ardiente de "comprender", por su probidad intelectual cada vez más exigente y por su infatigables aspiración dirigida hacia una ciencia cada vez más unida, más pura y más liberada, Hilbert ha encarnado verdaderamente, para la generación del periodo "entre las dos guerras", el ideal del matemático.

---